العنوان:	خوارزميات رونج - كوتا وتطبيقاتها
المؤلف الرئيسي:	رفيدة، سمية رجب محمد الشيباني
مؤلفين آخرين:	هب الريح، أحمد عبدالعالي(مشرف)
التاريخ الميلادي:	2007
موقع:	مصراته
الصفحات:	1 - 178
رقم MD:	765945
نوع المحتوى:	رسائل جامعية
اللغة:	Arabic
الدرجة العلمية:	رسالة ماجستير
الجامعة:	جامعة مصراتة
الكلية:	كلية العلوم
الدولة:	ليبيا
قواعد المعلومات:	Dissertations
مواضيع:	الخوارزميات العددية، خوارزميات رونج - كوتا، المعادلات التفاضلية
رابط:	http://search.mandumah.com/Record/765945

الجماهيرية العربية الليبية الشعبية الاشتراكية العظمى

جامعة ٧ أكتوبر

كلية العلوم - مصراتة

قسم الرياضيات

خوارزميات رونج – كوتا و تطبيقاتها

قدمت هذه الرسالة استكمالاً لمتطلبات الإجازة العالية " الماجستير" في الرياضيات

مقدمة من الطالبة :-

سمية رجب محمد الشيباني رفيدة

بكالوريس علوم – رياضيات

إشراف :-

د .احمد عبدالعالي هب الريح

أستاذ مشارك بقسم الرياضيات- جامعة ٧ من أكتوبر

***العام* الجامعي ٢٠٠٦-٢٠٠٧**

بسم الله الرحمن الرحيم

(وَأَن لَّيْسَ لِلإِنسَـــ!ـنِ إِلاَّ مَا سَعَى ٣٨
وَأَنَّ سَعْيَهُ سَوْفَ يُرَى ٣٩ ثُـــُمَّ يُجْزَ]ِـ!ـهُ
الْجَزَآءَ الأَوْفَى ٤٠)

صدق الله العظيم

سورة النجمِ

شكر و تقدير

الحمد لله الذي علم الإنسان ما لم يعلم،،،

من شكر الله شكر عباده ، أتقدم بأسمى آيات الشكر والتقدير لمن شرفني سبحانه وتعالى بأن يكون مشرفا على بحثي ، فكان خير سند وخير عون لي ، إذ كان لنصحائه وإرشاداته الدور الكبير في إنارة الدرب وتذليل الصعاب والعراقيل ، إلى الأستاذ الفاضل

د. أحمد عبدالعالي هب الريحِ.

وأتقدم بخالص الشكر ووافر التقدير إلى والدي الكرام اللذان كانت إرشاداتهما ودعواتهما خير زاد لي في إتمام هذا البحث.

وافر شكري وامتناني لكل من مد لي يد العون في إظهار هذا البحث، واخص بالذكر كلا من الأخِ م.بشير محمد الفيتوري، الأخِ عبدالرحمن محمد الفيتوري، الأخِ د.أسامة رجب رفيدة، الأخِ أنس رجب رفيدة.

الإهداء

إلى من انتظر هذه اللحظة بفارغِ الصبر، إلى نور عيني الذي به أبصر وإلى نبض قلبي الذي به أحيا، إلى من كان عرقه مدادا لقلمي

أبي

إلى الينابيعِ التي لا تمل العطاء ، إلى من كان رضاهن زادا لي في الحياة ودعواتهن نورا في طريقي ، إلى من حكن سعادتي بخيوط من نسيجِ قلوبهن.

أمي وجدتي

إلى من حبهم يجري في عروقي، و يلهجِ بذكراهم قلبي، إلى من عشت معهم الحياة حلوها ومرها.

إخوتي وأخواتي

إلى من عشت معهم أجمل لحظات العمر.

أصدقائي

إلى الذين كرسوا كل وقتهم من أجل إظهاري للمجتمعِ بمظهر الإنسان النموذجي.

أساتذتي

إلى كل من انتظر هذه اللحظة، إلى من يسعدهم الوصول إلى ما وصلت إليه.

أهدي ثمرة جهدي

سمية رفيدة

المحتويات

الملخــص

هذا البحث، خوارزميات رونجِ–كوتا وتطبيقاها، يقدم دراسة لبعض الخوارزميات العددية لحل المعادلات التفاضلية، ومن خلال هذه الدراسة لوحظ أنه يوجد عدد لا نهائي من خوارزميات رونجِ–كوتا في كل مرحلة ابتداءً من المرحلة الثانية وذلك حسب قيمة الوسيط، ولا يمكن الحكم على أي من هذه الخوارزميات التي من نفس المرحلة أنها أفضل من غيرها عند حل مسألة ما؛ لأن ذلك يعتمد على طبيعة المعادلة التفاضلية، وكذلك طول الخطوة يؤثر في دقة الحل ومرحة الطريقة، فطريقة رونجِ–كوتا من المرحلة الرابعة أكثر استخداماً لأنه لا يمكن الحصول على خوارزمية من المرحلة الخامسة والرتبة الخامسة، وبالتالي يجب إضافة مرحلتين للحصول على هذه الخوارزمية، وقد تم تعميم خوازميات حل مسألة قيمة ابتدائية واحدة إلى حل منظومة من المعادلات التفاضلية ومعادلات من رتب عليا.

المقـــدمة

المعادلات التفاضلية العادية تظهر عند معالجة بعض المسائل الفيزيائية والهندسية وغيرها من العلوم الأخرى، ولكن هذه المعادلات قد يصعب إيجاد حلها تحليلياً، وبالتالي من الضروري استخدام الخوارزميات العددية لإيجاد قيم تقريبية لحل هذه المعادلات.

هذا البحث، خوارزميات رونجِ–كوتا وتطبيقاتها، يقدم دراسة للخوارزميات العددية لحل المعادلات التفاضلية، ويشتمل هذا البحث على أربعة فصول، حيث احتوى الفصل الأول على بعض التعاريف والنظريات التي نحتاجها في هذا البحث ونبذة عن المعادلات التفاضلية. أما الفصل الثاني فيحتوي على مقدمة للطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية احتوى على طريقة تايلور، وقد وجد عند استخدامها بأنها دقيقة ولكنها غير عملية بسبب حاجتها إلى مشتقات من رتب عليا، والتي قد تكون صعبة الإيجاد لبعض الدوال معقدة البنية الجبرية، كما احتوى على طريقة أويلر التي تعتبر أقدم وأبسط الأساليب العددية لحل مسائل القيم الابتدائية، ثم طريقة أويلر المعدلة، وهي من طرق التنبؤ والتصحيحِ لأنه يتم تصحيحِ القيمة y المحسوبة بإحدى الطرق الأخرى.

الفصل الثالث يشتمل على خوارزميات رونجِ–كوتا، حيث تم اشتقاق خوارزميات رونجِ–كوتا من المرحلة الأولى حتى المرحلة الخامسة، ويلاحظ أنه يمكن الحصول على عدد لا نهائي من الخوارزميات في كل مرحلة ابتداءً من المرحلة الثانية. وتمت دراسة خوارزمية رونجِ–كوتا–نيستروم وخورازمية رونجِ–كوتا–بوتشر كحالة خاصة من خوارزميتي رونجِ–كوتا من المرحلتين السادسة والسابعة على الترتيب، واللتان يمكن اشتقاقهما بنفس أسلوب اشتقاق الخوارزميات السابقة لها. وتمت دراسة الأخطاء والاستقرار وخطأ التحكم وطريقة رونجِ–كوتا فليبرق.

أما الفصل الرابعِ فيحتوي على حل المنظومات التفاضلية حيث تم تعميم خوارزميات حل المعادلة التفاضلية الواحدة إلى خوارزميات لحل منظومة من المعادلات التفاضلية. وقد تم إعداد البرامجِ باستخدامِ لغة فورتران Fortran 90 في كتابة البرامجِ.

والله أعلم

الفصل الأول

مفاهيم أساسية

١,١ نبذة عن المعادلات التفاضلية [1]

تعريف (١)

المعادلة التفاضلية (Differential equation): هي معادلة تحتوي على متغير أو متغيرات مستقلة ودالة مجهولة ومشتقاتها. إذا كانت تحتوي على متغير مستقل واحد تسمى معادلة تفاضلية عادية (ordinary) وغير ذلك تسمى معادلة تفاضلية جزئية (partial)، فمثلاً

$\frac{dy}{dx} + y\sin x = x$ معادلة تفاضلية عادية.

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ معادلة تفاضلية جزئية.

تعريف (٢)

رتبة (order) المعادلة التفاضلية هي رتبة أعلى مشتقة تشتمل عليها المعادلة التفاضلية.

تعريف (٣)

درجة (degree) المعادلة التفاضلية: هي قوة أعلى مشتقة تشتمل عليها المعادلة التفاضلية، فمثلا:

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + x\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^3 + \frac{dy}{dx} = e^x$$

معادلة تفاضلية من الرتبة الثالثة والدرجة الأولى.

تعريف (٤)

الصورة العامة للمعادلة التفاضلية العادية من الرتبة n هي:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

تعريف (٥)

حل المعادلة التفاضلية هو الدالة التي تحقق هي ومشتقاتها المعادلة التفاضلية. والمعادلة التفاضلية لها عدد لا نهائي من الحلول التي يمكن تمثيلها على هيئة دالة أو صيغة جبرية تحتوي

---

[1] أنظر [7] [8].

على ثوابت اختيارية يسمى هذا الحل حلاً عاماً (General solution) للمعادلة التفاضلية. وإذا وضعت قيمة معينة لهذه الثوابت يتم الحصول على حل يسمى الحل الخاص (particular solution) للمعادلة التفاضلية، وللحصول على هذا الحل يجب توفر شروط تسمى الشروط الابتدائية.

والمسألة المكونة من معادلة تفاضلية وشروط ابتدائية تسمى مسألة قيمة ابتدائية (initial value problem)، مثل:

$$y' = f(x,y) \quad ; \quad x \geq a \ , \ y(a) = \alpha$$

تعريف (٦)

المعادلة التفاضلية الخطية (linear) من الرتبة n هي معادلة خطية في المتغير التابع ومشتقاته جميعاً، وتأخذ الصورة:

$$p_n(x)y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = R(x)$$

إذا كانت $R(x) = 0$ تسمى خطية متجانسة، وغير ذلك تسمى خطية غير متجانسة.

منظومة المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى

First order system of ordinary differential equations

منظومة المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى تكتب على الصورة:

$$y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n)$$

$$y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n)$$

ويمكن كتابة النظام السابق على الصورة:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \\ f_n \end{bmatrix}$$

تحويل المعادلة التفاضلية من الرتبة n إلى منظومة من المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى:

إذا كان لدينا المعادلة التفاضلية:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

والشروط:

$$y(x_0)=\alpha_0 \quad , \quad y'(x_0)=\alpha_1 \ , \ y''(x_0)=\alpha_2 \ , \ y'''(x_0)=\alpha_3 \ ,\ldots, y^{(n-1)}(x_0)=\alpha_{n-1}$$

فإنه يمكن تحويل المعادلة إلى n من المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى باستخدام التحويلات الآتية:

$$y_1=y \ , \ y_2=y' \ ,\ldots., \ y_n=y^{(n-1)}$$

للحصول على المنظومة الآتية:

$$\begin{aligned}
y_1' &= y_2 \\
y_2' &= y_3 \\
\\
y_{n-1}' &= y_n \\
y_n' &= f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)
\end{aligned}$$

تصاحبها الشروط الابتدائية التالية:

$$y_1(x_0)=\alpha_0 \quad , \quad y_2(x_0)=\alpha_1 \quad ,\ldots, \quad y_n(x_0)=\alpha_{n-1}$$

تعريف (٧)

الخوارزمية (Algorithm) هي مجموعة الخطوات المحددة والمتتابعة منطقياً بترتيب معين لحل مسألة أو إيجاد الحل التقريبي لها.

١,٢ متسلسلة تايلور [١] *TAYLOR SERIES*

نظرية (١)

إذا كانت $f \in C^{n+1}[a,b]$ و $x_0 \in [a,b]$، فإنه لكل $x \in (a,b)$ يوجد $x_0 < \varepsilon < x$ بحيث يحقق:

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)$$

حيث:

---

[١] أنظر [4].

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

و:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

وتسمى هذه الصيغة مفكوك تايلور للدالة $f(x)$ حول x_0 و R_n يسمى الباقي.

نظرِية (٢) [١]

إذا كانت الدالة $f(x,y)$ وجميعِ مشتقاتها الجزئية حتى الرتبة $(n+1)$ متصلة على:

$$D = \{(x,y) \ \ ; \quad a \le x \le b \ , \ c \le y \le d\}$$

و $D \in (x_0, y_0)$ فإن لكل $(x,y) \in D$ يوجد $x_0 < \varepsilon < x$ و $y_0 < \eta < y$ ، بحيث يتحقق أن:

$$f(x,y) = P_n(x,y) + R_n(x,y)$$

حيث:

$$P_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left[(x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^k f(x_0, y_0)$$

و:

$$R_n(x,y) = \frac{1}{(n+1)!}\left[(x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f(\varepsilon, \eta)$$

وتسمى هذه الصيغة مفكوك تايلور للدالة $f(x,y)$ حول (x_0, y_0) و R_n يسمى الباقي.

نظرِية (٣): نظرِية القيمة المتوسطة Mean value theorem

نفرض أن $f \in C[a,b]$ و $f'(x)$ معرفة لكل $x \in (a,b)$ ، فإنه يوجد عدد c بين a و b، حيث:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

أي:

---

[١] أنظر [18].

$$f(a)-f(b)=f'(c)(b-a)$$

١,٣ شرط لبشتز [١] LIPSCHIZ CONDITION

يقال أن الدالة $f(x,y)$ تحقق شرط لبشتز في المتغير y إذا وجد ثابت $L>0$ يحقق:

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|$$

لكل $x\,,\,y_1\,,\,y_2$ في D، يسمى L بثابت لبشتز.

ويمكن توضيحِ هذا التعريف بالمثال التالي:

بفرض أن:

$$D=\{(x,y):1\le x\le 2\ \ ,\ \ -3\le y\le 4\}$$

و

$$f(x,y)=x|y|$$

فإن:

$$\begin{aligned}|f(x,y_1)-f(x,y_2)|&=\left|x|y_1|-x|y_2|\right|\\&=|x|\left||y_1|-|y_2|\right|\\&\le 2|y_1-y_2|\end{aligned}$$

أي أن f تحقق شرط لبشتز على D في المتغير y و $L=2$.

نظرية (٤) [٢]

لتكن:

$$D=\{(x,y):a\le x\le b\,,-\infty<y<\infty\}\subset\Re^2$$

إذا وجد ثابت $L>0$ يحقق:

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\right|\le L\qquad\forall\,(x,y)\in D$$

---

[١] أنظر [18].

[٢] نفس المرجع.

فإن f تحقق شرط لبشتز على D.

تعريف (٨) [1]

بفرض أن:

$$D=\{(x,y):a\le x\le b\,,-\infty<y<\infty\}$$

إذا كانت f متصلة وتحقق شرط لبشتز في المتغير y على المجموعة D فإن مسألة القيمة الابتدائية:

$$y'=f(x,y)\quad ;\quad y(a)=y_0 \tag{1}$$

تكون معروضة جيداً (well-posed).

ويمكن التوضيح بالمثال التالي:

$$D=\{(x,y):1<x<1\,,-\infty<y<\infty\}$$
$$y'(x)=y-x^2+1\quad ;\quad 0\le x\le 2\ ,\ y(0)=0.2$$

فإن:

$$f(x,y)=y-x^2+1$$

تحقق شرط لبشتز، لأن:

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}(f(x,y)\right|=\left|\frac{\partial(y+x^2+1)}{\partial y}\right|=|1|=1>0$$

و f متصلة على D. إذن المسألة معروضة جيداً.

نظرية (٥)

لتكن المسألة (١) معروضة جيداً على:

$$D=\{(x,y):a\le x\le b\,,-\infty\le y\le\infty\}$$

فإن لها حل $y(x)$ وهذا الحل وحيد لكل $a\le x\le b$.

---

[1] أنظر [1].

نظرية مساعدة (١) [١]

لكل $x \geq 0$ ولأي عدد موجب m فإن:

$$0 < (1+x)^m \leq e^{mx}$$

البرهان

بتطبيق متسلسلة تايلور للدالة $f(x)=e^x$ حول $x_0=0$ و $n=1$، نحصل على:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}e^{\varepsilon}$$

$$0 < 1 + x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2}e^{\varepsilon}$$

$$0 < 1 + x \leq e^x$$

بما أن:

$$1 + x > 0$$

فإن:

$$0 \leq (1+x)^m \leq e^{mx}$$

نظرية مساعدة (٢) [٢]

إذا كان s و t عددين حقيقيين موجبين و $\{a_i\}_{i=0}^{k}$ متتالية تحقق:

$$a_0 \geq -\frac{t}{s} \qquad (1)$$

$$a_{i+1} \leq (1+s)a_i + t \qquad (2)$$

لكل $i = 0,1,\ldots,k$ فإن:

$$a_{i+1} \leq e^{(i+1)s}\left(\frac{t}{s} + a_0\right) - \frac{t}{s}$$

البرهان

$$a_{i+1} \leq (1+s)a_i + t \leq (1+s)\big((1+s)a_{i-1} + t\big) + t$$
$$\leq (1+s)^{i+1}a_0 + \big(1 + (1+s) + (1+s)^2 + \ldots + (1+s)^i\big)t$$

---

[١] أنظر [1].

[٢] أنظر [1].

$$\le (1+s)^{i+1}a_0 + t\sum_{j=0}^{i}\left[(1+s)^{j+1}-1\right] \le (1+s)^{i+1}a_0 + \frac{t}{s}\left[(1+s)^{i+1}-1\right]$$

$$\therefore a_{i+1} \le (1+s)^{i+1}\left(\frac{t}{s}+a_0\right) - \frac{t}{s}$$

وباستخدامِ النظرية المساعدة *(1)* ينتجِ:

$$a_{i+1} \le e^{(i+1)s}\left(\frac{t}{s}+a_{_0}\right) = \frac{t}{s}$$

تعرِيف (9)

إذا كانت $X_n = X_0 + nh$ نقاط متساوية البعد و $f_n = f(X_n)$ فإن قاعدة شبه المنحرف لتكامل الدالة $f(X)$ على الفترة $[X_{i-1}, X_i]$ تعرف كتالي:

$$\int_{X_{i-1}}^{X_i} f(X)dx = \frac{h}{2}[f_i + f_{i-1}]$$

حيث: $h = X_i - X_{i-1}$.

تعرِيف (10)

لتكن (X_i, y_i) حيث $i = 0,1,\ldots,n$ نقاط معطاة بحيث أن $X_i = X_0 + ih$ تعرف المشتقة من الرتبة m عند أي نقطة باستخدامِ الفروق الأمامية بالشكل التالي:

$$y_i^{(m)} = \frac{\Delta y_i^{(m-1}}{h} = \frac{y_i^{(m-1)} - y_{i-1}^{(m-1)}}{h}$$

حيث $\Delta y_i^{(m-1)}$ يسمى الفرق الأمامي لـ $y_i^{(m-1)}$.

فمثلاً المشتقة الأولى تعرف كالآتي:

$$y_i' = \frac{\Delta y_i}{h} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$$

والمشتقة الثانية:

$$y_i'' = \frac{\Delta y_i'}{h} = \frac{y_i' - y_{i-1}'}{h}$$

وهكذا.

الفصل الثاني

الطرق العددية لحل مسائل القيمة الابتدائية

٢,١ مقدمة للطرق العددية لحل مسائل القيم الابتدائية

INTRODUCTION TO NUMERICAL METHODS FOR SOLVING INITIAL VALUE PROBLEMS

إذا كانت مسألة القيمة الابتدائية المراد إيجاد حلها عددياً هي:

$$y' = f(x, y) \quad ; \quad y(a) = y_0 \qquad (1)$$

خلال الفترة $[a,b]$، حيث:

$$x_i = a + ih \quad ; \quad i = 0,1,2,\ldots,N$$

و $h = \dfrac{b-a}{N}$ حيث h تسمى طول الخطوة (step length) فإنه يمكن كتابة صيغة عامة للطرق العددية كالتالي:

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = h\varphi_f(y_{n+k}, y_{n+k-1}, \ldots, y_n, x_n, h) \qquad (2)$$

حيث k عدد النقاط المعلومة وعدد خطوات الطريقة، فتسمى الطريقة طريقة الخطوة الواحدة (one step) إذا كان $k = 1$ وغير ذلك تسمى طريقة متعددة الخطوة (multi step)، وستقتصر الدراسة في هذا البحث على طرق الخطوة الواحدة والتي تأخذ الشكل:

$$y_{n+1} = y_n + h\varphi_f(x_n, y_n, h) \qquad (3)$$

تعريف (١)

خطأ القطعِ (البتر) المحلي T_{n+1} (local truncation error) للمعادلة (٣) يعطى كالآتي:

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_n - h\varphi_f(x_n, y_n, h)$$
$$n = 0,1,\ldots,N-1$$

حيث $y(x)$ الحل الفعلي لمسألة القيمة الابتدائية و $\{y_n\}_{n=0}^{N}$ متتالية التقريبات العددية.

تعريف (٢)

خطأ القطعِ الكلي e_n (Global truncation error) للمعادلة (٣) يعطى كالآتي:

$$e_n = y(x_n) - y_n \quad ; \quad n = 1,2,\ldots,M$$

حيث $y(x)$ الحل الفعلي لمسألة القيمة الابتدائية و $\{y_n\}_{n=0}^{N}$ متتالية التقريبات العددية.

تعريف (٣)

يقال للطريقة العددية المعرفة بالمعادلة (٣) بأنها متقاربة إذا كان لكل مسائل القيم الابتدائية التى تحقق شرط لبشتز يكون:

$$\lim_{h\to 0} y_n = y(x_n)$$

٢,٢ طريقة تايلور *TAYLOR`S METHOD*

هذه الطريقة تعتمد على متسلسلة تايلور وهي طريقة ليست عددية بالمعنى القاطعِ والصريحِ، ولكنها تعتبر الحجر الأساس للطرق العددية الأخرى. وفكرة هذه الطريقة هي استخدام مفكوك الدالة $y(x)$ حول a التي لا نعرفها ولكن نعرف مشتقتها من مسألة القيمة الابتدائية (١)، فيتم إيجاد باقي المشتقات عند a وتكتب $y(x)$ على الشكل:

$$y(x) = y(a) + hy'(a) + \frac{h^2}{2} y''(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(a)$$

حيث $h = x - a$. ويمكن كتابتها بصورة أكثر عمومية:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \ldots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(x_n)$$

حيث $h = x_{n+1} - x_n$.

وهنا تسمى طريقة متسلسلة تايلور من الرتبة (n).

مثال ١

استخدم طريقة تايلور من الرتبة الرابعة لحل المسألة:

$$y' = -2xy^2 \quad ; \quad y(0) = 1$$

حيث $h = 0.1$ على الفترة $0 \le x \le 1$، وقارنه بالحل التحليلي:

$$y(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

الحل

عند $x = 0$:

$$y(0) = 1$$
$$y' = -2xy^2 \Rightarrow y'(0) = 0$$
$$y'' = -4xyy' - 2y^2 \Rightarrow y''(0) = -2$$
$$y''' = -4xyy'' - 4xy'^2 - 8yy' \Rightarrow y'''(0) = 0$$
$$y^{(4)} = -12xy'y'' - 12yy'' - 12y'^2 - 4xyy''' \Rightarrow y^{(4)}(0) = 24$$
$$y(0.1) = 1 + 0.1(0) + \frac{(0.1)^2}{2}(-2) + \frac{(0.1)^3}{6}(0) + \frac{(0.1)^4}{24}(24)$$
$$y(0.1) = 0.9901$$

عند $x = 0.1$:

$$y(0.1) = 0.9901$$
$$y'(0.1) = -0.196059602$$
$$y''(0.1) = -1.882948575$$
$$y'''(0.1) = 2.283296102$$
$$y^{(4)}(0.1) = 20.56313675$$
$$y(0.2) = 0.9901 + 0.1(-0.196059602) + \frac{0.1^2}{2}(-1.882948575) + \frac{0.1^3}{6}(2.283296102) + \frac{0.1^4}{24}(20.56313675)$$
$$y(0.2) = 0.961545526$$

يمكن الحصول على الحل العددي بسهولة باستخدام البرنامجِ (١)، والنتائجِ موضحة في الجدول (١).

```
PROGRAM TAYLOR
REAL*4 X,Y,Z,H
INTEGER I
OPEN(4,FILE='taylor.DAT')
READ(*,*) X,Y,H,N
WRITE(4,*)X,Y,Y,Y-Y
DO  I=1,N
Xnew=X+H
A=-2*X*Y**2
B=-2*Y**2-4*X*Y*A
C=-8*Y*A-4*X*A**2-4*X*Y*B
D=-12*A**2-12*Y*B-4*X*Y*C-12*X*A*B
Ynew=Y+H*A+(H**2)*B/2+(H**3)*C/6+(H**4)*D/24
Z=1/(Xnew**2+1)
WRITE(4,*)Xnew,Ynew ,Z ,ABS(Ynew-Z)
X=Xnew
```

```
Y=Ynew
END DO
CLOSE(4)
STOP
END
```

برنامج (١) لطريقة تايلور

x	الحل العددي	الحل الفعلي	مقدار الخطأ
0.000000E+00	1.000000	1.000000	0.000000E+00
1.000000E-01	9.901000E-01	9.900990E-01	1.013279E-06
2.000000E-01	9.615455E-01	9.615384E-01	7.092953E-06
3.000000E-01	9.174460E-01	9.174312E-01	1.478195E-05
4.000000E-01	8.620892E-01	8.620690E-01	2.026558E-05
5.000000E-01	8.000218E-01	8.000000E-01	2.175570E-05
6.000000E-01	7.353139E-01	7.352941E-01	1.978874E-05
7.000000E-01	6.711568E-01	6.711409E-01	1.585484E-05
8.000001E-01	6.097676E-01	6.097561E-01	1.150370E-05
9.000001E-01	5.524938E-01	5.524861E-01	7.688999E-06
1.000000	5.00004٧E-01	4.999999E-01	4.768372E-06

جدول (١)

مثـال ٢

استخدام طريقة تايلور لحل المسألة:

$$y' = -y^2 \sin x \quad ; \quad y(0) = 0.5$$

حيث $h = 0.025$ على الفترة $0 \le x \le 0.5$، وقارنه بالحل الفعلي $y(x) = \dfrac{1}{3 - \cos x}$.

الحـل

النتائجِ العددية تتضحِ من الجدول التالي:

x	الحل العددي	الحل الفعلي	مقدار الخطأ
٠,٠٠٠٠٠٠E+00	5.000000E-01	5.000000E-01	0.000000E+00
٢,٥٠٠٠٠٠E-02	4.999219E-01	4.999219E-01	0.000000E+00
٥,٠٠٠٠٠٠E-02	4.996878E-01	4.996878E-01	0.000000E+00
٧,٥٠٠٠٠٠E-02	4.992982E-01	4.992982E-01	0.000000E+00
١,٠٠٠٠٠٠E-01	4.987541E-01	4.987541E-01	0.000000E+00
١,٢٥٠٠٠٠E-01	4.980570E-01	4.980570E-01	2.980232E-08

x	الحل العددي	الحل الفعلي	مقدار الخطأ
١,٥٠٠٠٠٠E-01	4.972084E-01	4.972084E-01	2.980232E-08
١,٧٥٠٠٠٠E-01	4.962105E-01	4.962106E-01	2.980232E-08
٢,٠٠٠٠٠٠E-01	4.950658E-01	4.950658E-01	2.980232E-08
٢,٢٥٠٠٠٠E-01	4.937769E-01	4.937769E-01	2.980232E-08
٢,٥٠٠٠٠٠E-01	4.923470E-01	4.923471E-01	5.960464E-08
٢,٧٥٠٠٠٠E-01	4.907795E-01	4.907795E-01	5.960464E-08
٣,٠٠٠٠٠٠E-01	4.890780E-01	4.890780E-01	5.960464E-08
٣,٢٥٠٠٠٠E-01	4.872464E-01	4.872465E-01	5.960464E-08
٣,٥٠٠٠٠١E-01	4.852890E-01	4.852891E-01	8.940697E-08
٣,٧٥٠٠٠١E-01	4.832102E-01	4.832103E-01	5.960464E-08
٤,٠٠٠٠٠١E-01	4.810145E-01	4.810146E-01	5.960464E-08
٤,٢٥٠٠٠١E-01	4.787067E-01	4.787068E-01	5.960464E-08
٤,٥٠٠٠٠١E-01	4.762918E-01	4.762919E-01	5.960464E-08
٤,٧٥٠٠٠١E-01	4.737748E-01	4.737748E-01	5.960464E-08
٥,٠٠٠٠٠١E-01	4.711608E-01	4.711608E-01	5.960464E-08

جدول (٢)

ولدراسة مدى تأثير عدد الحدود المأخوذ من متسلسلة تايلور ندرس المثال التالي.

مثـال ٣

أوجد حل المسألة:

$$y' = xe^{3x} - 2y \quad ; \quad y(0) = 0$$

باستخدام طريقة تايلور، حيث $h = 0.1$، باستخدام حدين وثلاث حدود وخمس حدود على الفترة $0 \le x \le 1$ وقارنه بالحل الفعلي $y(x) = \frac{1}{25}[5xe^{3x} - e^{3x} + e^{-2x}]$.

الحـل

أولاً: بأخذ حدين من متسلسلة تايلور، النتائج تتضح من الجدول (٣)

x	الحل العددي	الحل الفعلي	مقدار الخطأ

0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
1.000000E-01	0.000000E+00	5.752054E-03	5.752054E-03
2.000000E-01	1.349859E-02	2.681280E-02	1.331421E-02
3.000000E-01	4.724125E-02	7.114454E-02	2.390329E-02
4.000000E-01	1.115811E-01	1.507778E-01	3.919675E-02
5.000000E-01	2.220696E-01	2.836165E-01	6.154695E-02
6.000000E-01	4.017401E-01	4.960196E-01	9.427953E-02
7.000000E-01	6.843710E-01	8.264810E-01	1.421100E-01
8.000001E-01	1.119129	1.330858	2.117287E-01
9.000001E-01	1.777157	2.089775	3.126179E-01
1.000000	2.760902	3.219101	4.581985E-01

جدول (٣)

ثانياً: بأخذ ثلاث حدود من متسلسلة تايلور، النتائجِ تتضحِ من الجدول (٤)

x	الحل العددي	الحل الفعلي	مقدار الخطأ
٠,٠٠٠٠٠٠E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
١,٠٠٠٠٠٠E-01	5.000000E-03	5.752054E-03	7.520537E-04
٢,٠٠٠٠٠٠E-01	2.502281E-02	2.681280E-02	1.789991E-03
٣,٠٠٠٠٠٠E-01	6.789380E-02	7.114454E-02	3.250740E-03
٤,٠٠٠٠٠٠E-01	1.454484E-01	1.507778E-01	5.329415E-03
٥,٠٠٠٠٠٠E-01	2.753132E-01	2.836165E-01	8.303314E-03
٦,٠٠٠٠٠٠E-01	4.834539E-01	4.960196E-01	1.256570E-02
٧,٠٠٠٠٠٠E-01	8.078083E-01	8.264810E-01	1.867270E-02
٨,٠٠٠٠٠١E-01	1.303447	1.330858	2.741027E-02
٩,٠٠٠٠٠١E-01	2.049890	2.089775	3.988552E-02
1.000000	3.161443	3.219101	5.765748E-02

جدول (٤)

ثالثاً: بأخذ خمسة حدود من متسلسلة تايلور، النتائجِ تتضحِ من الجدول (٥)

x	الحل العددي	الحل الفعلي	مقدار الخطأ
٠,٠٠٠٠٠٠E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
١,٠٠٠٠٠٠E-01	5.745834E-03	5.752054E-03	6.220303E-06
٢,٠٠٠٠٠٠E-01	2.679868E-02	2.681280E-02	1.412071E-05
٣,٠٠٠٠٠٠E-01	7.111996E-02	7.114454E-02	2.457201E-05
٤,٠٠٠٠٠٠E-01	1.507391E-01	1.507778E-01	3.875792E-05
٥,٠٠٠٠٠٠E-01	2.835582E-01	2.836165E-01	5.832314E-05
٦,٠٠٠٠٠٠E-01	4.959339E-01	4.960196E-01	8.568168E-05
٧,٠٠٠٠٠٠E-01	8.263571E-01	8.264810E-01	1.239181E-04

٨,٠٠٠٠٠١E-01	1.330680	1.330858	1.776218E-04
٩,٠٠٠٠٠١E-01	2.089522	2.089775	2.529621E-04
1.000000	3.218742	3.219101	3.585815E-04

جدول (٥)

من الجداول (٣) ، (٤) ، (٥) يتضح أن:

عند أخذ حدين من متسلسلة تايلور فإن الحلين العددي والفعلي يتطابقان في رقم معنوي واحد على الأكثر.

وعند أخذ ثلاثة حدود من متسلسلة تايلور فإن الحلين يتطابقان في ثلاثة أرقام معنوية على الأكثر.

وعند أخذ خمسة حدود من متسلسلة تايلور فإن الحلين يتطابقان في أربعة أرقام معنوية على الأكثر.

أي كلما زادت حدود متسلسلة تايلور كلما زادت الدقة.

ولدراسة تأثير طول الخطوة على دقة الحل باستخدام طريقة تايلور ندرس المثال التالي:

مثـال ٤

استخدم طريقة تايلور من الرتبة الرابعة لحل المسألة:

$$y' = 1 + y^2 \quad ; \quad y(0) = 0$$

حيث $h = 0.2, 0.1, 0.05$ على الفترة $0 \le x \le 1$ وقارنه بالحل الفعلي $y(x) = \tan x$.

الحـل

النتائج تتضح من الجدول (٦)

x	الحل العددي	الحل الفعلي	مقدار الخطأ
$h = 0.2$			
٠,٠٠٠٠٠٠E+00	0.00000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
٢,٠٠٠٠٠٠E-01	2.026667E-01	2.027100E-01	4.336238E-05
٤,٠٠٠٠٠٠E-01	4.226783E-01	4.227932E-01	1.149476E-04
٦,٠٠٠٠٠٠E-01	6.838389E-01	6.841369E-01	2.979636E-04
٨,٠٠٠٠٠٠E-01	1.028737	1.029639	9.016991E-04